

# Programme de colle n°19

semaine du 2 au 6 mars

## Notions vues en cours

### Chapitre 25 : Relations de comparaison

- Suite **dominée, négligeable, équivalente** à une autre suite, notations  $u_n = O(v_n)$ ,  $u_n = o(v_n)$  et  $u_n \sim v_n$  ; ces relations ne sont pas modifiées lorsqu'on change un nombre fini de termes de  $u_n$  et/ou de  $v_n$   
*Note : les définitions s'appuient uniquement sur le quotient  $u_n/v_n$  et son caractère borné au voisinage de  $a$  ou sa limite en  $a$*
- Si  $u_n = o(v_n)$ , alors  $u_n = O(v_n)$ , mais la réciproque est fausse
- Simplifications avec  $o$  (et idem pour  $O$ ) : pour tous  $\lambda$  et  $\mu$  non nuls,  $\lambda u_n = o(\mu v_n) \iff u_n = o(v_n)$  ; si  $\varepsilon_n = o(u_n)$  et  $\varepsilon'_n = o(v_n)$ , alors  $u_n + \varepsilon_n = o(v_n) \iff u_n = o(v_n) \iff u_n = o(v_n + \varepsilon'_n)$
- Si  $u_n = o(v_n)$  et  $\tilde{u}_n = o(v_n)$ , alors  $\alpha u_n + \beta \tilde{u}_n = o(v_n)$ , transitivité de  $o$  et de  $O$ , la relation  $\sim$  est une relation d'équivalence
- Pour tout  $\ell$  fini et non nul, on a  $u_n \sim \ell \iff u_n \rightarrow \ell$ ,  $u_n \sim v_n \iff u_n - v_n = o(v_n)$
- **Équivalents usuels en 0**, composition à droite par une suite qui tend vers 0 dans un équivalent usuel
- Produit, quotient et passage à la puissance sont permis dans les équivalents (mais pas l'addition !)
- La relation  $u_n \sim v_n$  transfère l'existence et la valeur d'une limite, ainsi que le signe strict à partir d'un certain rang si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ; si  $u_n \leq v_n \leq w_n$  et que  $u_n \sim w_n$ , alors  $v_n \sim u_n \sim w_n$
- Extensions aux fonctions, notations  $f(x) = O_{x \rightarrow a}(g(x))$  ou  $f = O_a(g)$  /  $f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x))$  ou  $f = o_a(g)$  /  $f(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x)$  ou  $f \sim_a g$   
*Note : les définitions s'appuient uniquement sur le quotient  $f/g$  et son caractère borné au voisinage de  $a$  ou sa limite en  $a$*
- Équivalent en  $\pm\infty$  et en 0 d'un polynôme non nul en  $x$

### Chapitre 26 : Développements limités

- Développement limité à l'ordre  $n$  en  $a$ , notation  $DL_n(a)$ , partie régulière, reste d'un DL
- Écriture alternative d'un  $DL_n(a)$  de  $f$  en se ramenant à un  $DL_n(0)$  de  $h \mapsto f(a+h)$
- Unicité du  $DL_n(a)$ , lien entre  $DL_n(0)$  et parité de la fonction, troncature d'un DL
- Formule de Taylor-Young, formulaire des **DL usuels en 0** (disponible en ligne)
- Interprétation du  $o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)$  comme  $(x-a)^n \varepsilon(x)$  avec  $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ , règles de calcul avec des petit- $o$  compte tenu de cette interprétation
- **Opérations et DL** : combinaison linéaire, produit, composition et substitution (notamment pour un DL en 0 : remplacer  $x$  par  $\pm x^k$ ), passage à l'inverse, intégration
- Équivalence entre  $DL_0(a)$  et continuité (quitte à prolonger par continuité en  $a$ ). Équivalence entre  $DL_1(a)$  et dérivabilité (si la fonction est définie en  $a$ )
- Vu en TD : obtention d'un DL en un point  $a$  quelconque en se ramenant à un DL en 0

Les questions de cours sont en page suivante

## Questions de cours

**Question Flash.** Une question de cours sans démonstration choisie par l'examineur, sur laquelle on doit passer un temps minimal. Cette question est choisie parmi celles ci-dessous, après les questions longues (chapitres **22 à 24**).

**Question Longue.** *Pas de question longue cette semaine. Les points qui lui sont normalement attribués sont répercutés sur les exercices, qui seront plus nombreux cette semaine.*

### Questions Flash au programme :

Chapitre 24 :

- Rappeler le théorème de d'Alembert-Gauss.
- Quels sont les polynômes irréductibles sur  $\mathbb{C}$  ? et sur  $\mathbb{R}$  ?
- Donner la forme de la factorisation d'un polynôme de  $\mathbb{C}[X]$ , en précisant le rôle de chaque variable
- Donner la forme de la factorisation d'un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$ , en précisant le rôle de chaque variable
- Qu'appelle-t-on un polynôme scindé sur  $\mathbb{K}$  ? et scindé à racines simples ?
- En termes de racines, donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $P \wedge Q = 1$
- Soit  $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$  avec  $a \neq 0$ , dont on note  $\alpha, \beta, \gamma$  les racines complexes. Donner les relations coefficients-racines.
- Quelle structure algébrique possède l'ensemble  $\mathbb{K}(X)$  des fractions rationnelles ?
- Soit  $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ . Que doit-on vérifier pour que  $F$  soit irréductible ?
- Soit  $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ . Que vaut  $\deg(F)$  ? Dans quel ensemble prend-il ses valeurs ?
- Quelle est la définition d'un pôle d'une fraction rationnelle  $\frac{A}{B}$  ? et d'une racine ?
- Donner la forme de la DES sur  $\mathbb{R}(X)$  ou sur  $\mathbb{C}(X)$  pour une fraction rationnelle donnée par l'examineur (*le dénominateur étant déjà factorisé ou facile à factoriser, et la division euclidienne n'étant pas nécessaire*).

Chapitre 23 :

- Rappeler la définition de " $P$  et  $Q$  sont associés"
- Si  $B \mid A$  dans quel cas peut-on dire que  $\deg B \leq \deg A$  ? Que peut-on dire de plus si  $\deg B = \deg A$  ?
- Soit  $A, B \in \mathbb{K}[X]$ . Si  $A \mid B$  et  $B \mid A$ , que peut-on dire ?
- Énoncer le théorème de la division euclidienne dans  $\mathbb{K}[X]$
- Rappeler la relation de Bézout (ou théorème de Bézout-Bachet) pour des polynômes
- Rappeler le théorème de Bézout pour des polynômes
- Que peut-on dire des polynômes  $AB$  et  $(A \vee B)(A \wedge B)$  ?
- Compléter :  $\alpha$  est une racine de  $P$  ssi ..... divise  $P$
- Donner deux caractérisations de " $\alpha$  est racine de multiplicité exactement  $m$ " : une avec une relation de divisibilité, une qui fait intervenir  $P$  et ses dérivées.
- Donner deux caractérisations de " $\alpha$  est racine de multiplicité au moins  $m$ " : une avec une relation de divisibilité, une qui fait intervenir  $P$  et ses dérivées.
- Quel lien existe-t-il entre le degré d'un polynôme et son nombre de racines (comptées avec multiplicité) ?

Chapitre 22 :

- Écrire la forme développée (avec un signe  $\sum$ ) d'un polynôme  $P$  tel que  $\deg P \leq n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).  
Donner une CNS (condition nécessaire et suffisante) pour avoir  $\deg P = n$ .
- Donner les formules des degrés de  $P + Q$  et de  $PQ$
- Soit  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  et  $Q = \sum_{k=0}^m b_k X^k$ . Compléter la formule :  $PQ = \sum_{k=0}^{\dots} c_k X^k$  avec  $c_k = \dots$
- Que peut-on dire du degré de  $P \circ Q$  si  $Q$  est constant ? et si  $Q$  est non constant ?
- Soit  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ . Compléter la formule :  $P' = \sum_{k=0}^{\dots} (\dots) X^k$
- Énoncer la formule de Taylor pour un polynôme  $P$